محاضرة "15"   / /

مبرهنة:

لتكن $\{X_\alpha, \tau_\alpha\}$ أسرة من الفضاءات الطبولوجية و $X = \prod X_\alpha$
يكون فضاء الجداء X هو (T_1-فضاء) اذا وفقط اذا كانت
جميع الفضاءات الاحداثية X_α هي (T_1-فضاء)

البرهان:

★ **لزوم الشرط:**

لنفرض أن X هي (T_1 فضاء) وحسب ملاحظة سابقة دائماً يوجد
فضاء جزئي X'_α من فضاء الجداء X بحيث يكون متكافئاً
طبولوجياً (أي هوميومورفيزم) للفضاء الاحداثي والذي هو X_α و $\forall \alpha$
وحسب الصفة الوراثية "أن كل فضاء جزئي من T_1-فضاء هو
T_1 فضاء"
يكون الفضاء الجزئي X'_α هو (T_1-فضاء) وحسب الصفة الطبولوجية
والذي هو التكافؤ الطبولوجي يكون الفضاء الاحداثي هو (T_1-فضاء)
وذلك من أجل أي دليل α.

★ **كفاية الشرط:**

نفرض أن جميع الفضاءات الاحداثية هي (T_1-فضاء) ولنثبت
أن فضاء الجداء X هو (T_1-فضاء).

نأخذ نقطتين مختلفتين "x, y" من فضاء الجداء
هذا يعني أنه يوجد دليل δ بحيث أن الاحداثية "$x_\delta \neq y_\delta$"
في الفضاء الاحداثي X_δ ولكن بالفرض لدينا X_δ هي T_1-فضاء ومنه
فلنأخذ تطبيق الاسقاط من الرتبة δ

$$P_\delta : X \longrightarrow X_\delta$$

أن هذا التطبيق مستمر ومتباين ومستقره T_1-فضاء وبالتالي X
هو T_1-فضاء، وذلك حسب مبرهنة سابقة.

1) X هو T_1 فضاء
2) $f: X \to Y$

/ /

ملاحظة:

إنّ فضاء القسمة لـ "T_1 - فضاء" ليس من الضروري أن يكون "T_1 - فضاء"

يوضح ذلك مثال سابقاً هو التالي للتذكير

لنأخذ الفضاء الحقيقي المألوف R هذا الفضاء هو T_2 فضاء بالتالي هو T_1 فضاء و T_0 فضاء

$x \rho y \Leftrightarrow x - y \in Q$

أثبتنا عندها أنّ فضاء القسمة غير متقطع $\tau_\rho = \{\phi , R/\rho\}$ أو هي طولوجيا القسمة طولوجيا ضعيفة وبالتالي فإنّ الفضاء ليس T_1 - فضاء.

الفضاءات الطبولوجية المتراصة:

تعريف:

لتكن $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ أسرة من المجموعات المفتوحة في X نقول عن هذه الأسرة أنها تغطية للفضاء X إذا كان

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

ونسمي الفضاء X فضاء متراصاً إذا كانت أي تغطية مفتوحة له تحوي على تغطية جزئية منتهية

مثال:

$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \{]-n, n[\}_{n \in N}$

إنّ الفضاء R فضاء غير متراص.

لأن المجالات $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \{]-n, +n[\}$ تشكل تغطية لـ R ولكن لا تحوي على تغطية جزئية منتهية.

مثال:

لتكن X مجموعة غير منتهية وكانت (τ - قوية)

إنَّ الفضاء المنقطع الناتج (X, τ) غير متراص.

لأن الأسرة المجموعات وحيدة العنصر تشكل تغطية للفضاء.

$X \subseteq \bigcup \{x\}_{x \in X}$

ولكنها لايمكن أن تحتوي على تغطية جزئية منتهية

تعريف:

نقول عن مجموعة جزئية A من فضاء طبولوجيا X أنها متراصة

إذا كان الفضاء الجزئي A متراص

ملاحظة:

نبرهن بسهولة أن المجموعة A تكون متراصة إذا وفقط إذا كانت أي تغطية مفتوحة لها تحتوي على تغطية جزئية منتهية.

مثال:

أي مجموعة منتهية من فضاء طبولوجي هي مجموعة متراصة.

الحل:

لتكن $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

ولتكن $\{U_\alpha\}$ تغطية جزئية منتهية أي أنَّ $A \subseteq U_\alpha$

هذا يعني أنه يوجد $(a_i \in U_{\alpha_1})$ وكذلك الأمر $a_2 \in U_{\alpha_2}$

أي أنه $(a_1 \in U_{\alpha_1})$ ؛ $(i = 0, 1, 2, \dots)$ ومنه نجد أن الأسرة

المنتهية $[U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n}]$ تشكل تغطية منتهية لهذه المجموعة

مبرهنة: (1)

المجموعة المغلقة من فضاء متراص تكون مجموعة متراصة، والعكس غير صحيح بالحالة العامة

مبرهنة: (2)

المجموعة المتراصة من فضاء هاوسدورف حصراً هي مجموعة مغلقة

مبرهنة (3)

التطبيق المستمر يحافظ على التراص. بمعنى أنه:

اذا كان f تطبيقاً مستمراً من الفضاء المتراص X إلى Y فإن المجموعة $f(X)$ تكون مجموعة متراصة. $f: X \longrightarrow Y$

★ حالة خاصة

اذا كان التطبيق f غامراً ومستمر عندئذٍ المستقر يكون فضاء متراص أيضاً

$f(X)=Y$

نتيجة:

فضاء القسمة من فضاء متراص هو فضاء متراص.

البرهان:

لنأخذ التطبيق القانوني

$\gamma: X \longrightarrow X/\rho$

$\gamma(x)=[x]$

بما أن هذا التطبيق مستمر وغامر وبالتالي X/ρ يكون متراص

/ /

مبرهنة:
يكون فضاء الجداء X متراصاً $\Leftrightarrow$ كانت جميع الفضاءات الاحداثية متراصة

تمرين: (1)
ليكن $f: X \longrightarrow Y$
تطبيق مستمر من الفضاء المتراص X إلى فضاء هاوسدورف Y
اثبت أن f تطبيق مغلق.

الحل:
لنأخذ مجموعة مغلقة كيفية A من X وبما أن X متراص وهي مغلقة حسب مبرهنة تكون A متراصة. (مغلقة في متراص متراصة)
وبما أن f مستمر والاستمرار يحافظ على التراص فإن $f(A)$ تكون متراصة والمتراصة في فضاء هاوسدورف تكون مغلقة فإن $f(A)$ مغلقة بالتالي
(A مغلقة و $f(A)$ مغلقة $\Leftarrow$ f تطبيق مغلق)

تمرين (2)
اثبت أن اجتماع عدد منتهٍ من المجموعات المتراصة هو مجموعة متراصة

لنفرض أن A، B مجموعتان متراصتان في الفضاء X ولنثبت أن $A \cup B$ متراصاً لاثبات ذلك:
نأخذ تغطية مفتوحة كيفية "$\{U_\alpha\}$" للاجتماع "$A \cup B$" طالما أنها تغطية للاجتماع فهي تغطية لكل منها
بالتالي نجد أن U تغطية مفتوحة لـ A وبما أن A متراصة فإن هذه التغطية المفتوحة U تحوي على تغطية جزئية منتهية
U_1 لـ x كما أن U_1 تغطية مفتوحة لـ B وبما أن B متراصة

فإنّ هذه التغطية تحتوي على تغطية جزئية منتهية وهي u_2
ومن هنا نجد أنّ $(u_1 \cup u_2)$ تشكل تغطية مفتوحة منتهية لـ
$A \cup B$
وبالتالي فإنّ الاجتماع متراص.

التراص في الفضاءات المترية:

★ خاصة (1)
المجموعة المتراصة في فضاء متري هي مجموعة محدودة

★ خاصة (2)
كل مجموعة متراصة في فضاء متري تكون مغلقة ومحدودة
والعكس في الحالة العامة غير صحيح.

« لكن العكس صحيح في الفضاءات الإقليدية أي الفضاء R^n »

« A متراصة $\Leftrightarrow$ A مغلقة ومحدودة »

- أي مجال مغلق في R هو مجموعة متراصة
- R غير متراص لأنه غير محدود
- Q غير متراصة في R لأنها غير محدودة وغير مغلقة
- Z غير متراصة في R لأنها غير محدودة
- المجال المفتوح $]2,7[$ غير متراص لأنه غير محدود وغير مغلق

Alamal